# Maximal cuspidal curveの補空間の基本群について(複素解析幾何学における特異点)



金子, 譲一

数理解析研究所講究録
474巻 1982年 1-6



# Maximal cuspidal curve の補空間の基本群について

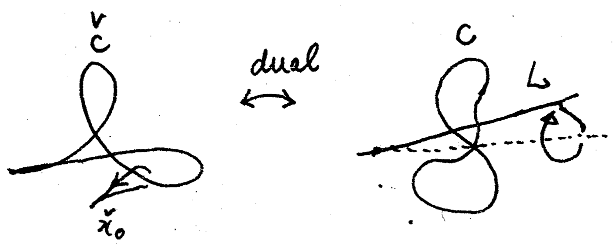
九大・理 金子譲一

1° $C \subset \mathbb{P}^2$ を $n$ 次代数曲線, $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ をその双対曲線とする. $C$ の非特異モデルを $R$, その $n$ 次対称積を $R^{(n)} = \overbrace{R \times \cdots \times R}^{n\text{個}} / \mathfrak{S}_n$, $D = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^{(n)} \mid \exists i \neq j,\ x_i = x_j\}$ とする.

準同型.

$$\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2 - \check{C}) \longrightarrow \pi_1(R^{(n)} - D)$$

を以下のようにして与えることができる. $\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2 - \check{C})$ の基点を $\check{x}_0$, $L \subset \mathbb{P}^2$ をその双対直線とするとき, $\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2 - \check{C}, \check{x}_0)$ の元に対して, $L$ から出発して $L$ に戻ってくる $\mathbb{P}^2$ の直線の"運動"が loop の上の点の双対直線をとることにより定まる. しかもこの運動の途中で直線が $C$ の特異点を通ったり, また $C$ に接したりすることはない. 故に, $C$ とこの直線との交点 $n$ 個の, 互いに衝突せずまた $C$ の特異点を通らぬ"運動"がえられ, これは $R$ 上にもち上がるから $\pi_1(R^{(n)} - D)$ の元を定める. この対応がきめる写像を与える。この写像の ker. coker は何かという問題



が生ずる．ところで，$p = R$ の種数，$n \geqq 2p-1$ のとき，$R^{(n)}$ は，$R$ のヤコビ多様体 $J(R)$ 上の $\mathbb{P}^{n-p}$ 束であった．このファイバー構造を用いて，次の完全系列を証明することができる．

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^{n-p} - \mathbb{P}^{n-p} \cap D) \longrightarrow \pi_1(R^{(n)} - D) \xrightarrow{(*)} \pi_1(J(R)) \longrightarrow 1.$$

ここに，$\overbrace{\mathbb{P}^{n-p}}^{\text{ファイバー}}$ は，very ample な linear series に対応するものをとる．また $(*)$ は，abel-jacobi 写像により induce されるものとする．$P \subset \mathbb{P}^{n-p}$ を一般な 2-plane とすれば，$\pi_1(\mathbb{P}^{n-p} - \mathbb{P}^{n-p} \cap D) \cong \pi_1(P - P \cap D)$。$\check{C} \equiv P \cap D$ は，$C$ として，種数 $p$，次数 $n$ で node のみもつ，$R$ と双有理な平面曲線をとったときの双対曲線であって，$P$ 一般ゆえ，node と cusp のみを特異点とするから，次数 $2(n+p-1)$，cusp $3(n+2p-2)$ 個，node $2(n-2)(n-3)+2p(2n+p-7)$ 個をもち，同じ degree, genus で最大個の cusp をもつ曲線である．

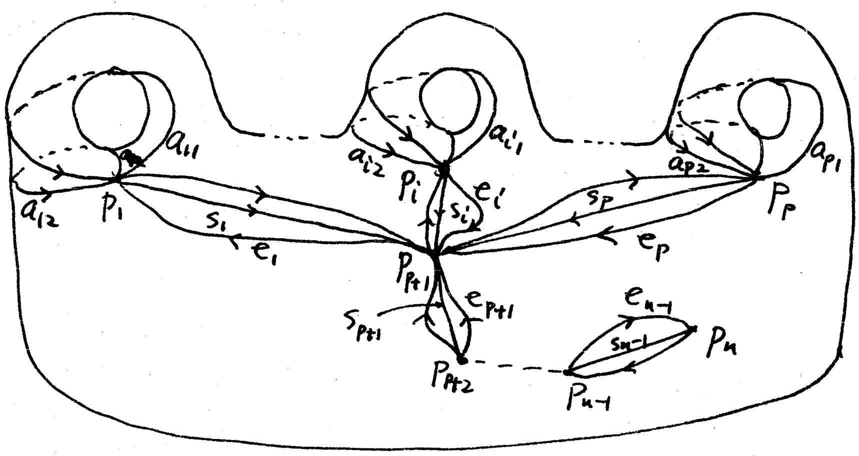
$\pi_1(R^{(n)} - D)$ の有限表示は，Zariski によって与えられている．従って，Reidemeister-Schreier の方法により，$\pi_1(P - \check{C})$ の一般には，無限な（即ち，生成元，基本関係式とも無限な）表示を与えることができる．Zariski [2] は，このようにして，$p=1$ のとき，無限表示を求め，それを還元していって，有限表示にまで reduce した。我々の目標は，これを $p$：一般のときに実行することである。そのためには，$n$ 次組みひも群の $\pi_1(R^{(n)} - D)$ の表示を Zariski のそれと

異なったものにとることがKey-pointとなる.

2°. 組みひも群の有限表示.

$P=(p_1\cdots p_n)$ を $R^{(n)}-D$ の基点にとる. Rのdissections $a_{ij}$, $1\le i\le p$, $j=1,2$ を, $a_{i1}\cap a_{i2}=p_i$ かつ. $a_{11}a_{12}^{-1}a_{11}^{-1}a_{12}\cdots\cdots a_{p1}a_{p2}^{-1}a_{p1}^{-1}a_{p2}$ が 2-cell になるようにとる.(下図参照).

$p_{p+1},\cdots,p_n$ は, この2-cellの内部にあるとし, それらを向きを一定にとった線分 $s_1\cdots s_{n-1}$ で結ぶ.




$\pi_1(R^{(n)}-D)$ の生成元を以下のようにとる: $e_i$ は $1\le i\le p$ (resp. $p+1\le i\le n-1$) のとき. $p_i$ を $\underbrace{p_{p+1}}_{(resp.\ p_{i+1})}$ に, $\underbrace{p_{p+1}}_{(resp.\ p_{i+1})}$ を $p_i$ に, 上図の如くいれかえる運動を表わす.

$p_i$, $1\le i\le p$, が dissection $a_{ij}$ にそって. 上図の如く動く. 運動を $a_{ij}$ で表わす.

Theorem 1. $\pi_1(R^{(n)}-D)$ は、生成元 $e_i$ $1\le i\le n-1$, $a_{ij}$ $1\le i\le p$, $j=1,2$, をもち、基本関係式は次の通り:

(1) $e_ie_j=e_je_i$, $p+1\le i,j\le n-1$, $|i-j|\ge 2$, or $1\le i\le p$, $p+2\le j\le n-1$

(2). $e_ie_{i+1}e_i=e_{i+1}e_ie_{i+1}$, $1\le i\le n-2$.

(3) $e_ie_{i+1}e_i^{-1}e_j=e_je_ie_{i+1}e_i^{-1}$, $1\le i<j-1\le p$.

(4) $a_{ij}e_k=e_ka_{ij}$, $i\ne k$, $j=1,2$

(5) $a_{ij}a_{kl}=a_{kl}a_{ij}$, $i\ne k$, $j,l=1,2$.

(6) $(e_i^{-1}a_{ij})^2=(a_{ij}e_i^{-1})^2$, $1\le i\le p$, $j=1,2$

(7). $a_{i2}a_{i1}'^{-1}a_{i2}^{-1}a_{i1}'=e_i^2$, $a_{i1}'=e_{i1}^{-1}a_{i1}e_{i1}$, $1\le i\le p$.

(8) $\left(\prod_{i=1}^{p}e_ia_{i2}^{-1}a_{i1}a_{i2}a_{i1}^{-1}e_i\right)e_{p+1}\cdots e_{n-2}e_{n-1}^2e_{n-2}\cdots e_{p+1}=1$.

ここに $\prod_{k=1}^{\ell}x_k$ は $x_1x_2\cdots x_\ell$ を表わす.

証明は、Zariski [2] の与えた生成元、基本関係式との比較による。即ち、これらの生成元によって Zariski の生成元が表わされることを示し、これらの関係式から、Zariski の関係式が実際に従うことを示すことによる。

## 3° 主定理

Reidemeister-Schreier の方法を、完全系列

$$1\longrightarrow\pi_1(\mathbb{P}^2-\check{C})\longrightarrow\pi_1(R^{(n)}-D)\longrightarrow H_1(R)\longrightarrow 1$$

へ適用すれば、$\pi_1(\mathbb{P}^2-\check{C})$ の表示がえられる。これを

reduction していけば. 結局. 次のようになる.

Theorem 2. $\pi_1(\mathbb{P}^2-\check{C})$ は次の有限表示をもつ.

生成元: $e_{ikl} \equiv a_{i_1}^{k} a_{i_2}^{l} e_i (a_{i_1}^{k} a_{i_2}^{l})^{-1}$, $1\le i\le p$, $k,l=0,1$

$e_j$, $p+1\le j\le n-1$.

関係式:

(1') $e_{ikl}\, e_{i+1,k'l'}\, e_{ikl} = e_{i+1,k'l'}\, e_{ikl}\, e_{i+1,k'l'}$

$1\le i\le p-1$, $k,l,k',l'=0,1$ 及び $(k,l),(k',l')=(0,2),(2,0),(2,1)$.

(2') $e_{pkl}\, e_{p+1}\, e_{pkl} = e_{p+1}\, e_{pkl}\, e_{p+1}$, $k,l=0,1$ 及び $(k,l)=(0,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$,

ここで

$$e_{i02} = e_{i01}\, e_{i00}\, e_{i01}^{-1}$$
$$e_{i20} = e_{i10}\, e_{i00}\, e_{i10}^{-1} \qquad 1\le i\le p.$$
$$e_{i21} = e_{i11}^{-1}\, e_{i01}\, e_{i11}$$

以下, $k,l,k',l',k'',l''$ は, 0か1の勝手な値をとるものとする。

(3') $e_{ikl}\, e_{i+1,k'l'}\, e_{ikl}^{-1}\, e_{jk''l''} = e_{jk''l''}\, e_{ikl}\, e_{i+1,k'l'}\, e_{ikl}^{-1}$,

$1\le i<j-1\le p-1$

(4') $e_{ikl}\, e_{i+1,kl}\, e_{ikl}^{-1}\, e_{p+1} = e_{p+1}\, e_{ikl}\, e_{i+1,kl}\, e_{ikl}^{-1}$, $1\le i\le p-1$

(5') $e_{jk'l'}\, e_{ikl}\, (e_{i01}\, e_{i11}\, e_{i10}\, e_{i00})^{-1}\, e_{ikl}$

$= e_{ikl}\, (e_{i01}\, e_{i11}\, e_{i10}\, e_{i00})^{-1}\, e_{ikl}\, e_{jk'l'}$. $1\le i\ne j\le p$

(6′) $e_{ik\ell}\, e_j = e_j\, e_{ik\ell}$, $1 \le i \le p$, $p+2 \le j \le n-1$.

(7′) $e_i\, e_{i+1}\, e_i = e_{i+1}\, e_i\, e_{i+1}$, $p+1 \le i \le n-1$

(8′) $e_i\, e_j = e_j\, e_i$, $p+1 \le i, j \le n-1$, $|i-j| \ge 2$.

(9′) $\left(\prod_{i=1}^{p} e_{i01}\, e_{i11}\, e_{i10}\, e_{i00}\right) e_{p+1} \cdots e_{n-2}\, e_{n-1}^{2}\, e_{n-2} \cdots e_{p+1} = 1$.

証明は.計算のみである。Zariskiのそれと.かなり平行にいく。詳細は本論文を参照して下さい。

## 文献

[1] Dolgachev-Libgober : On the fundamental group of the complement to a discriminant variety, In: Algebraic Geometry, Lect. Notes in Math. vol 862, pp 1~25.

[2] Zariski, O : The topological discriminant group of a Riemann surface of genus p. Amer. J. Math. 59 (1937), pp. 335~358.